Matematik 3AN projekt

310381 Anders Gaarde 090880 Niels Woo-Sang Kjærsgaard

23. maj 2003

Banachalgebraer

Definition 1. En $\mathbb{C}$-*algebra* er et $\mathbb{C}$-vektorrum A, hvori der er defineret en multiplikation $\cdot : A \times A \to A$, således at $(A, +, \cdot)$ er en ring med et-elementet 1_A, for hvilken der gælder

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b) \quad \forall a, b \in A, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Et lineært underrum B af en $\mathbb{C}$-algebra A kaldes en delalgebra af A, hvis B indeholder 1_A og er lukket under multiplikation. En $\mathbb{C}$-algebra A er kommutativ, hvis der for alle $a, b \in A$ gælder, at $ab = ba$.

En *normeret algebra* er en $\mathbb{C}$-algebra A, udstyret med en norm $\|\cdot\|$, som har følgende egenskaber:

1. $\forall a, b \in A : \|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ (sub-multiplikativitet af normen).
2. $\|1_A\| = 1$.

En *banachalgebra* er en normeret algebra, som er fuldstændig.

Hvis A og B er normerede algebraer, da er en lineær afbildning $\varphi : A \to B$ en algebraisk homomorfi, hvis

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \quad \text{for alle } a, b \in A \qquad \text{og} \qquad \varphi(1_A) = 1_B.$$

Det vises let ved hjælp af sub-multiplikativitet, at multiplikationen er kontinuert i enhver normeret algebra.

Eksempel 2. (1) Lad E være et banachrum over $\mathbb{C}$. Af 5.6 og 5.7 i M&V fås, at $L(E)$ med sammensætning som multiplikation er en banachalgebra. Det er klart, at $L(E)$ ikke er kommutativ, hvis $\dim(L(E)) > 1$.

(2) Lad $K \neq \emptyset$ være et kompakt topologisk rum. Da udgør $C(K, \mathbb{C})$, hvor multiplikation defineret punktvis, en kommutativ banachalgebra under supremumsnormen.

Definition 3. Et element a i en banachalgebra A siges at være *invertibelt*, hvis der findes et element $b \in A$, så $ab = ba = e$. Det er klart, at b er entydigt bestemt, og b bliver kaldt for det *inverse* element til a. For nemheds skyld vil vi betegne det med a^{-1} i stedet for b. Mængden

$$\mathcal{G}_A := \{a \in A \mid a \text{ invertibel}\}$$

er en gruppe i A, da $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, så $xy \in \mathcal{G}_A$ for alle $x, y \in \mathcal{G}_A$.

Definition 4. Lad A være en banachalgebra, og lad $a \in A$. Da betegner

$$\rho(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid z1_A - a \in \mathcal{G}_A\}$$

resolventmængden af a. Funktionen

$$R(\cdot, a) : \rho(a) \to A, \quad R(z, a) := (z1_A - a)^{-1},$$

kaldes for resolventen af a. Mængden $\sigma(a) := \mathbb{C} \setminus \rho(a)$ kaldes for *spektret* for a.

Lemma 5. *(Neumann rækker) Lad A være en banachalgebra og $x \in A$ med $\|x\| < 1$. Da er $1_A - x$ invertibel og der gælder, at*

$$\|(1_A - x)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|x\|}.$$

Bemærkning 6. Følgende vises ikke. $\rho(a)$ er åben, så $\sigma(a)$ er lukket, $R(\cdot, a) : \rho(a) \to A$ er kontinuert, og for $z \in \mathbb{C}$ med $|z| > \|a\|$ er $(ze - a)$ invertibel, og der gælder, at

$$R(z, a) = (ze - a)^{-1} = \frac{1}{z}\left(e - \frac{a}{z}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}.$$

Så $\sigma(a) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|a\|\}$ og er derfor også kompakt.

Lemma 7. *Lad A være en banachalgebra, $a \in A$ og $z, \zeta \in \rho(a)$. Da gælder*

1. $R(z, a) - R(\zeta, a) = (\zeta - z)R(z, a)R(\zeta, a) \qquad$ (resolventligningen).

2. $\lim_{\zeta \to z} \frac{1}{z - \zeta}(R(z, a) - R(\zeta, a)) = -R(z, a)^2$.

Vi vil ikke vise dette lemma, men bruger resultatet til at vise sætning 9.

Lemma 8. *Lad E være et normeret rum. Da adskiller E' punkter i E.*

Bevis. Lad $x, z \in E$. Hvis $y(x) = y(z)$ for alle $y \in E'$, da er

$$\|y(x) - y(z)\| = \|y(x - z)\| = 0 \quad \text{for alle } y \in E'.$$

Antag nu at $x \neq z$, dvs. $\|x - z\| = c \neq 0$. I følge M&V 6.10 (et korollar til Hahn-Banach sætningen), findes da et $Y \in E'$ så $Y(x - z) = \|x - z\| = c$ i modstrid med $y(x - z) = 0$ for alle $y \in E'$. Altså vil $y(x) = y(z) \Rightarrow x = z$. □

Sætning 9. *Lad A være en banachalgebra. For alle $a \in A$ er spektret $\sigma(a)$ en kompakt ikke-tom delmængde af $\mathbb{C}$.*

Bevis. Af bemærkning 6 er $\sigma(a)$ kompakt i $\mathbb{C}$, så vi mangler kun at vise, at $\sigma(a)$ ikke er tom. Antag derfor modsat, at der findes et a, så $\sigma(a) = \emptyset$. Det følger deraf, at resolventmængden $\rho(a) = \mathbb{C}$, så $R(0, a) = (-a)^{-1} \neq 0$, og af lemma 8 må der derfor eksistere et $y \in A'$ med $y(R(0, a)) \neq 0$. Vi har nu fra lemma 7, at der for

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) := y(R(z, a))$$

gælder, at

$$\begin{aligned}\lim_{\zeta \to z} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} &= \lim_{\zeta \to z} \frac{y(R(z, a) - R(\zeta, a))}{z - \zeta} \\ &= y\left(\lim_{\zeta \to z} \frac{R(z, a) - R(\zeta, a)}{z - \zeta}\right) = -y(R(z, a)^2),\end{aligned}$$

så f er en holomorf funktion. Det ses nu fra lemma 5 og bemærkning 6, at vi for $z \in \mathbb{C}$ med $|z| > \|a\|$ har, at

$$\|R(z, a)\| = \left\|\frac{1}{z}\left(1 - \frac{a}{z}\right)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{|z|}\left(1 - \left\|\frac{a}{z}\right\|\right)^{-1} = (|z| - \|a\|)^{-1}.$$

Altså for $|z| > \|a\|$ er

$$|f(z)| = |y(R(z, a))| \leq \frac{\|y\|}{|z| - \|a\|}, \tag{1}$$

så $f(z)$ er begrænset på $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \|a\|\}$. Da $\overline{K(0, \|a\|)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \|a\|\}$ er kompakt, er f således begrænset på $\mathbb{C}$. Altså er f en hel, begrænset funktion og af Liouvilles sætning dermed konstant. Fra (1) fås, at $\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$, så $f \equiv 0$, hvilket er i modstrid med, at $f(0) = y(R(0, a)) \neq 0$. □

Definition 10. Lad A være en banach algebra og $a \in A$ være givet. Da bliver størrelsen

$$r(a) := \sup\{|z| \mid z \in \sigma(a)\}$$

kaldt for *spektral radius* for a.

Vi vil give følgende sætning uden bevis.

Sætning 11. *Hvis A er en banachalgebra, da gælder der for hvert $a \in A$, at*

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} \qquad \text{(spektral radius formlen).}$$

Definition 12. Hvis A er en banachalgebra, da bliver mængden

$$\mathrm{Sp}\,(A) := \{\varphi \in A' \mid \varphi \text{ er en algebraisk homomorfi}\}$$

kaldt for *spektret* for A.

Sætning 13. *Lad A være en kommutativ banachalgebra. Da gælder der for alle $a \in A$:*

1. *a er invertibel hvis og kun hvis $\varphi(a) \neq 0$ for alle $\varphi \in \mathrm{Sp}\,(A)$.*

2. *$\sigma(a) = \{\varphi(a) \mid \varphi \in \mathrm{Sp}\,(A)\}$*

Bevis. Vi vil ikke bevise (1), men bruge resultatet til at vise (2).

(2) Af (1) har vi, at $z \in \sigma(a)$ hvis og kun hvis der findes et $\varphi \in \mathrm{Sp}\,(A)$ for hvilket der gælder, at $0 = \varphi(z1_A - a) = z - \varphi(a)$. Hvilket viser (2). □

Bemærkning 14. Lad A være en banachalgebra og lad $\varphi \in \mathrm{Sp}\,(A)$. Da er φ kontinuert med $\|\varphi\| = 1$. Af sætning 13 fås, at $\varphi(a) \in \sigma(a)$, så

$$|\varphi(a)| \leq r(a) \leq \|a\|.$$

Hvilket medfører, at$\|\varphi\| \leq 1$; $\varphi(1_A) = 1$ giver, at $\|\varphi\| = 1$.

Definition 15. En C^*-algebra er en banachalgebra A med en afbildning $* : a \mapsto a^*$ af A ind i sig selv, som opfylder følgende

1. $*$ er en involution, dvs. at der alle $a, b \in A$ og $\lambda \in \mathbb{C}$ gælder

$$(a+b)^* = a^* + b^*, \quad (\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*, \quad (ab)^* = b^* a^* \quad \text{og} \quad (a^*)^* = a.$$

2. $\|a^*a\| = \|a\|^2$ for alle $a \in A$.

En C^*-delalgebra B af en C^*-algebra A er en lukket delalgebra B af A, som er $*$-invariant.

Lemma 16. *Hvis A er en C^*-algebra, da gælder følgende:*

1. $\|a^*\| = \|a\|$ *for alle* $a \in A$.

2. $1_A^* = 1_A$.

3. *Hvis $a \in A$ er invertibel, så er a^* det også, og* $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$.

Bevis. (1) Af $\|a\|^2 = \|a^*a\| \leq \|a^*\|\|a\|$ fås, at $\|a\| \leq \|a^*\|$. Og hvis vi bruger a^* i stedet for a fås den anden ulighed, $\|a^*\| \leq \|(a^*)^*\| = \|a\|$, så (1) gælder.

(2) $1_A^* = 1_A 1_A^* = (1_A^*)^* 1_A^* = (1_A 1_A^*)^* = (1_A^*)^* = 1_A$.

(3) Idet $aa^{-1} = 1_A = a^{-1}a$ og (2) gælder, har vi, at

$$(a^{-1})^* a^* = (aa^{-1})^* = 1_A^* = 1_A = 1_A^* = (a^{-1}a)^* = a^*(a^{-1})^*.$$

Hvilket viser, at a^* har en invers, hvis a også har det, og da denne er entydig bestemt, må der også gælde, at $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$. $\square$

Eksempel 17. (1) Hvis K er et kompakt topologisk rum, da er $C(K, \mathbb{C})$ en C^*-algebra, hvis f^* er defineret ved $f^* : x \mapsto \overline{f(x)}$.

(2) Hvis $H \neq \{0\}$ er et kompakt Hilbert rum, fås af 11.11 i M&V, at $L(H)$ er en C^*-algebra, hvor A^* er den adjungerede operator til A.

Definition 18. Lad A være en C^*-algebra. Da kaldes $a \in A$ for selv-adjungeret, hvis $a^* = a$, unitær, hvis $a^* = a^{-1}$ og normal, hvis $a^*a = aa^*$.

Lad $M \neq \emptyset$ være en delmængde af en C^*-algebra A. Da kaldes mængden

$$M' := \{x \in A \mid xm = mx \text{ for alle } m \in M\}$$

for kommutanten for M, og $(M')'$ kaldes for bi-kommutanten for M.

Det kan let vises, at M' er en lukket delalgebra af A. Hvis $M^* = M$ fås, at $M'^* = M'$, så M' er derfor en C^*-delalgebra af A.

Lemma 19. *Lad A være en C^*-algebra. Hvis $a \in A$ er normal, så er $B := (\{a, a^*\}')'$ en kommutativ C^*-delalgebra af A, som indeholder a og a^*, og hvor der gælder for alle $b \in B$, at $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$.*

Korollar 20. *Lad A være en C^*-algebra. Da er $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$ for alle $\varphi \in \mathrm{Sp}\,(A)$ og $a \in A$.*

Lemma 21. *Lad A være en C^*-algebra. For alle normale elementer $a \in A$ gælder der*

$$r(a) = \|a\|.$$

Bevis. Lad en C^*-algebra A og et normalt element $a \in A$ være givet. Da gælder der, at

$$\|a^2\|^2 = \|(a^2)^* a^2\| = \|(a^* a)^*(a^* a)\| = \|a^* a\|^2 = \|a\|^4,$$

så $\|a^2\| = \|a\|^2$. Men da der for enhvert $k \in \mathbb{N}$ gælder, at a^k er normal når a er det, fås, at $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Af sætning 11 fås nu, at

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^{2^n}\|^{1/2^n} = \|a\|.$$

Definition 22. En algebraisk homomorfi $\Phi : A \to B$ mellem to C^*-algebraer A og B siges at være en $*$-*homomorfi*, hvis $\Phi(a^*) = \Phi(a)^*$ for alle $a \in A$.

Sætning 23. *Lad A og B være C^*-algebraer og lad $\Phi : A \to B$ være en $*$-homomorfi. Hvis A er kommutativ, er Φ kontinuert med $\|\Phi\| = 1$.*

Lemma 24. *For en C^*-algebra A er $*$-afbildningen $A \to A$ kontinuert*

Bevis. Det ses direkte fra lemma 16.1 at $*$-afbildningen er en isometri, og dermed kontinuert. □

Sætning 25. *Lad A være en C^*-algebra og a et normalt element i A. Da findes netop én $*$-homomorfi $\Phi : C(\sigma(a), \mathbb{C}) \to A$, for hvilken $\Phi(z) = a$. Denne afbildning Φ er en isometri.*

Bevis. Fra lemma 19 følger, at $B := (\{a, a^*\}')'$ er en kommutativ C^*-delalgebra af A, som indeholder a og a^*. Er $q : z \longmapsto \sum_{j,k=0}^{n} \alpha_{j,k} z^j \overline{z}^k$ et polynomium i z og $\overline{z}$ med komplekse koefficienter $\alpha_{j,k}$, vil

$$q(a) := \sum_{j,k}^{n} \alpha_{j,k} a^j (a^*)^k$$

ligge i B, pr. definition af C^*-delalgebra. For hvert $\varphi \in \mathrm{Sp}\,(B)$ giver korollar 20

$$\varphi(q(a)) = \sum_{j,k=0}^{n} \alpha_{j,k} \varphi(a^j (a^*)^k) = \sum_{j,k=0}^{n} \alpha_{j,k} \varphi(a)^j \overline{\varphi(a)}^k = q(\varphi(a)), \tag{2}$$

hvoraf det følger, at

$$\begin{aligned}\sigma_B(q(a)) &= \{\varphi(q(a)) \mid \varphi \in \mathrm{Sp}\,(B)\} = \{q(\varphi(a)) \mid \varphi \in \mathrm{Sp}\,(B)\} \\ &= \{q(z) \mid z \in \sigma_B(a)\} = \{q(z) \mid z \in \sigma(a)\}.\end{aligned}$$

Ved lighedstegnene er – i rækkefølge – brugt: sætning 13.2, det netop viste resultat (2), sætning 13.2 igen, og endelig lemma 19.

Da B er kommutativ og $q(a) \in B$, er $q(a)$ normal i B. Fra definitionen på spektral radius, lemma 21 og ovenstående fås så

$$\|q(a)\| = r_B(q(a)) = \sup_{z \in \sigma_B(q(a))} |z| = \sup_{z \in \sigma(a)} |q(z)|. \tag{3}$$

Er p og q to komplekse polynomier i z og $\overline{z}$, der stemmer overens på $\sigma(a)$, følger fra (3) at $p(a) = q(a)$, da

$$\|(p-q)(a)\| = \sup_{z \in \sigma(a)} |(p-q)(z)| = 0.$$

Lad os definere

$$Q[\sigma(a)] := \{f \in C(\sigma(a), \mathbb{C}) \mid \exists\, q \in \mathbb{C}[z, \overline{z}] : f = q|_{\sigma(a)}\}.$$

Afbildningen $\tilde{\Phi} : q \mapsto q(a)$ ses let at være en lineær afbildning $Q[\sigma(a)] \to A$. Da multiplikationen i $Q[\sigma(a)]$ er defineret punktvis (siden $Q[\sigma(a)] \subseteq C(\sigma(a), \mathbb{C})$ og $\sigma(a)$ er kompakt – se eksempel 2.2) følger det endvidere at $\tilde{\Phi}$ er en algebraisk homomorfi. I følge (3) er $\tilde{\Phi}$ en isometri (i $Q[\sigma(a)] \subseteq C(\sigma(a), \mathbb{C})$ benyttes jo supremumsnormen).

Med $\overline{q}$ menes det komplekst konjugerede polynomium $z \mapsto \sum_{j,k=0}^{n} \overline{\alpha_{j,k}}\, \overline{z}^j z^k$. Definitionen af $q(a)$ giver da at

$$\tilde{\Phi}(\overline{q}) = \overline{q}(a) = \sum_{j,k=0}^{n} \overline{\alpha_{j,k}} (a^*)^j a^k = \tilde{\Phi}(q)^*. \tag{4}$$

Det følger fra kommentar (1) til Weierstrass' sætning, M&V 4.16, at $Q[\sigma(a)]$ er tæt i $C(\sigma(a), \mathbb{C})$. Da $\tilde{\Phi}$ således er en uniformt kontinuert (da isometri) afbildning fra en tæt mængde af $C(\sigma(a), \mathbb{C})$ ind i et banachrum, kan den i følge M&V 3.5 udvides til en kontinuert afbildning $\Phi : C(\sigma(a), \mathbb{C}) \to A$. Da $\tilde{\Phi}(z) = a$, er også $\Phi(z) = a$.

For $f \in C(\sigma(a), \mathbb{C})$ findes en følge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $Q[\sigma(a)]$ så $q_n \to f$. Fra definitionen på $*$-operationen på $C(\sigma(a), \mathbb{C})$ og kontinuitet af $*$ følger det, at den kompleks konjugerede følge $(\overline{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer mod f^*, thi

$$\lim_{n\to\infty} \overline{q_n} = \lim_{n\to\infty} (q_n^*) = (\lim_{n\to\infty} q_n)^* = f^*.$$

Altså er

$$\Phi(f^*) = \Phi(\lim_{n\to\infty} \overline{q_n}) = \lim_{n\to\infty} \Phi(\overline{q_n}) = \lim_{n\to\infty} (\Phi(q_n)^*) = (\lim_{n\to\infty} \Phi(q_n))^* = \Phi(f)^*$$

hvor den midterste lighed kommer fra (4) og $\tilde{\Phi} = \Phi|_{Q[\sigma(a)]}$. Det næstsidste lighedstegn er kontinuitet af $*$-operationen.

Altså er Φ en $*$-homomorfi, der opfylder $\Phi(z) = a$.

For at vise entydighed, antages at $\Psi : C(\sigma(a), \mathbb{C}) \to A$ er en anden $*$-homomorfi, der opfylder $\Psi(z) = a$. Da vil Ψ og Φ – pr. definition af $*$-homomorfi og $Q[\sigma(a)]$ – stemme overens på $Q[\sigma(a)]$. Da Ψ i følge sætning 23 er kontinuert og $Q[\sigma(a)]$ er tæt i $C(\sigma(a), \mathbb{C})$, vil $\Psi = \Phi$ pga. entydighedsudsagnet i M&V 3.5. $\square$

Definition 26. Lad S være en ikke-tom delmængde af en C^*-algebra A. Da defineres *C^*-delalgebraen genereret af S* til at være fællesmængden af alle C^*-delalgebraer af A, der indeholder S. Den betegnes $C^*(S)$.

$C^*(S)$ er en C^*-delalgebra for enhver ikke-tom $S \subseteq A$, da C^*-delalgebra dannelse er afsluttet overfor fællesmængdedannelse (indses let).

$C^*(1_A, a) := C^*(\{1_A, a\})$ kaldes C^*-delalgebraen genereret af a, thi 1_A og a^* trivielt er indeholdt. Er a normal i A, er $C^*(1_A, a)$ oplagt kommutativ og

$$C^*(1_A, a) = \overline{\operatorname{span}\{a^m (a^*)^n \mid m, n \in \mathbb{N}_0\}}.$$

Korollar 27. *Under betingelserne i sætning 25 er $\Phi : C(\sigma(a), \mathbb{C}) \to A$ en isometrisk $*$-isomorfi mellem $C(\sigma(a), \mathbb{C})$ og $C^*(1_A, a)$.*

Bevis. Det er allerede vist, at Φ er en isometrisk $*$-homomorfi, så det skal blot vises, at Φ er en isomorfi. Da $C^*(1_A, a)$ er afsluttet i A, er både $C(\sigma(a), \mathbb{C})$ og $C^*(1_A, a)$ banachrum. Af Banachs isomorfi sætning, M&V 8.6, skal blot vises at Φ er en bijektion.

Da Φ er en isometri gælder for $f \in N(\Phi)$ at $0 = \|\Phi(f)\| = \|f\|$, dvs. $f = 0$; ergo er Φ injektiv.

Det er klart, fra de respektive definitioner af de to mængder, at

$$\Phi(Q[\sigma(a)]) = \operatorname{span}\{a^m(a^*)^n \mid m, n \in \mathbb{N}_0\}$$

Da Φ er kontinuert, er

$$\Phi\big(C(\sigma(a), \mathbb{C})\big) = \Phi\big(\overline{Q[\sigma(a)]}\big) \subseteq \overline{\operatorname{span}\{a^m(a^*)^n \mid m, n \in \mathbb{N}_0\}} = C^*(1_A, a)$$

For at vise lighedstegn, vælges et $x \in C^*(1_A, a)$; da findes en følge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $\operatorname{span}\{a^m(a^*)^n \mid m, n \in \mathbb{N}_0\}$ så $w_n \to x$. Pga. ovenstående findes, for hvert $n \in \mathbb{N}$, netop et $q_n \in Q[\sigma(a)]$ så $\Phi(q_n) = w_n$. For alle $n, m \in \mathbb{N}$

$$\|q_n - q_m\| = \|\Phi(q_n) - \Phi(q_m)\| = \|w_n - w_m\|$$

og det ses at $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en Cauchy følge i banachrummet $C(\sigma(a), \mathbb{C})$. Altså findes et f, så $q_n \to f$ og dermed

$$\Phi(f) = \lim_{n\to\infty} \Phi(q_n) = \lim_{n\to\infty} w_n = x$$

For alle x findes således et f så $\Phi(f) = x$; Φ er altså surjektiv og dermed – som allerede forklaret – en isomorfi. □

Spektral afbildning sætning 28. *Lad A være en C^*-algebra og $a \in A$ være normal. Da gælder, for den i sætning 25 bestemte $*$-homomorfi $\Phi : C(\sigma(a), \mathbb{C}) \to A$, at:*

$$\sigma(\Phi(f)) = f(\sigma(a)) \quad \text{for hvert } f \in C(\sigma(a), \mathbb{C})$$

Bevis. Lad B og $Q[\sigma(a)]$ være som i beviset for sætning 25. Hvis $f \in C(\sigma(a), \mathbb{C})$ findes en følge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $Q[\sigma(a)]$, med $q_n \to f$. Da B er afsluttet (pr. definition af C^*-delalgebra) vil $\Phi(f) = \lim_{n\to\infty} \Phi(q_n)$ ligge i B, thi alle $\Phi(q_n)$ er i B. For $\varphi \in \operatorname{Sp}(B)$ fås fra kontinuiteten af φ og Φ, og (2):

$$\begin{aligned}\varphi(\Phi(f)) &= \varphi(\Phi(\lim_{n\to\infty} q_n)) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\Phi(q_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \varphi(q_n(a)) = \lim_{n\to\infty} q_n(\varphi(a)) = f(\varphi(a))\end{aligned}$$

Det følger nu, med hjælp fra sætning 13.2 og lemma 19, at

$$\begin{aligned}\sigma(\Phi(f)) &= \sigma_B(\Phi(f)) = \{\varphi(\Phi(f)) \mid \varphi \in \operatorname{Sp}(B)\} \\ &= \{f(\varphi(a)) \mid \varphi \in \operatorname{Sp}(B)\} = f(\sigma_B(a)) = f(\sigma(a))\end{aligned}$$

□

Det sidste resultat er medtaget udelukkende fordi ophavsmanden er Bent Fuglede, professor emeritus ved IMF.

Fugledes sætning 29. *Lad A være en C^*-algebra og lad $a, b \in A$. Hvis a er normal og $ab = ba$, da vil $a^*b = ba^*$.*

Bevis. Definér for $x \in A$

$$e^x := \exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k.$$

For at kontrollere konvergens, sættes $s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$ for $n \in \mathbb{N}$. Da konvergerer e^x pr. definition, netop hvis $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer. Siden A er fuldstændig, er det nok at vise, at $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ er Cauchy. Antages $m > n$, vil

$$\|s_m(x) - s_n(x)\| = \| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} x^k \| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} \|x\|^k.$$

Da $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ defineret ved $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ har konvergensradius uendelig, vil $\|s_m(x) - s_n(x)\| \to 0$ for $n, m \to \infty$, for alle $x \in A$. Altså konvergerer e^x for alle $x \in A$.

Fra kontinuitet og (konjugeret) linearitet af $*$ fås nu for $x \in A$:

$$(e^x)^* = (\lim_{n\to\infty} s_n(x))^* = \lim_{n\to\infty} (s_n(x)^*) = \lim_{n\to\infty} s_n(x^*) = e^{x^*}$$

For $x, y \in A$ med $xy = yx$ fås (det velkendte resultat)

$$e^x e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} y^m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j y^{k-j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+y)^k = e^{x+y}$$

hvor binomialformlen, $\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j y^{k-j} = (x+y)^k$ for $xy = yx$, er benyttet.

Specielt er $(e^x)^{-1} = e^{-x}$, da $e^0 = 1_A$ og selvfølgelig $x(-x) = (-x)x$.
Lad $a, b \in A$ med $ab = ba$ være givet; for alle $\mu \in \mathbb{C}$ gælder da:

$$\begin{aligned} e^{\mu a} b &= (\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mu a)^k}{k!}) b = \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=0}^{n} \frac{(\mu a)^k}{k!} b) \\ &= \lim_{n\to\infty} (b \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mu a)^k}{k!}) = b \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mu a)^k}{k!} = b e^{\mu a} \end{aligned}$$

da multiplikationen i A er kontinuert (b kan flyttes ind og ud af grænseværdi) og $ab = ba \Rightarrow a^k b = b a^k$ for alle k.

Heraf sluttes, at $e^{\mu a} b e^{-\mu a} = b$. Defineres $f : \mathbb{C} \to A$ ved

$$f(\lambda) := e^{\lambda a^*} b e^{-\lambda a^*} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{(a^*)^k b(-a^*)^{n-k}}{k!(n-k)!} \Big) \lambda^n \tag{5}$$

ses så, at $f(\lambda) = e^{\lambda a^* - \overline{\lambda} a} b e^{\overline{\lambda} a - \lambda a^*}$. Sættes $u_\lambda := e^{\lambda a^* - \overline{\lambda} a}$, observeres der, at $u_\lambda^* = e^{(\lambda a^* - \overline{\lambda} a)^*} = e^{\overline{\lambda} a - \lambda a^*} = u_\lambda^{-1}$; altså er u_λ unitær, så $\|u_\lambda\| = \|u_\lambda^*\| = 1$. Det følger nu at

$$\|f(\lambda)\| = \|u_\lambda b u_\lambda^*\| \ \leq \|u_\lambda\| \ \|b\| \ \|u_\lambda^*\| = \|b\| \tag{6}$$

Hvis $y \in A'$, vil for alle $\lambda \in \mathbb{C}$: $|y \circ f(\lambda)| \leq \|y\| \ \|f(\lambda)\| \leq \|y\| \ \|b\|$. Altså er $y \circ f$ defineret (og begrænset) på hele $\mathbb{C}$, givet ved

$$y \circ f(\lambda) = y(\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{(a^*)^k b(-a^*)^{n-k}}{k!(n-k)!} \Big) \lambda^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{y((a^*)^k b(-a^*)^{n-k})}{k!(n-k)!} \Big) \lambda^n$$

hvor kontinuiteten af y er benyttet for at sætte den "under sumtegnet".

$y \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ er altså givet ved en potensrække, så det er nu vist at $y \circ f$ er en hel funktion (holomorf på $\mathbb{C}$), der er begrænset. Det følger fra Liouvilles sætning, at $y \circ f$ er konstant.

Vi ønsker at vise, at f er konstant. Antag modsat at der findes $s, t \in \mathbb{C}$ så $f(s) \neq f(t)$; da A' i følge lemma 8 adskiller punkter i A, findes et $Y \in A'$ så $Y(f(s)) \neq Y(f(t))$ i modstrid med $y \circ f$ konstant for alle $y \in A'$; det konkluderes at f er konstant. Ergo, da $f(0) = b$, er

$$e^{\lambda a^*} b e^{-\lambda a^*} = f(\lambda) = b \quad \text{for alle } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Altså gælder

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a^*)^k b}{k!} \lambda^k = e^{\lambda a^*} b = b e^{\lambda a^*} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b(a^*)^k}{k!} \lambda^k.$$

For alle $y \in A'$ gælder så

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y((a^*)^k b)}{k!} \lambda^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y(b(a^*)^k)}{k!} \lambda^k.$$

Fra identitetssætningen for potensrækker fås $y(a^* b) = y(b a^*)$ for alle $y \in A'$. Da A' adskiller punkter i A må $a^* b = b a^*$. $\square$