Peano's kurve

230980 Carsten Varming 250581 Anders Schack-Nielsen
090880 Niels Woo-Sang Kjærsgaard

2. november 2001

Spørgsmål 1

$$
\begin{aligned}
f_1(t) &= (3t, 3t) && \text{for } t \in \left[0, \tfrac{1}{9}\right] \\
f_1(t) &= \left(3t - \frac{4}{3}, -3t + \frac{6}{3}\right) && \text{for } t \in \left[\tfrac{5}{9}, \tfrac{6}{9}\right]
\end{aligned}
$$

Spørgsmål 2

Vi aflæser på figur 3.

$$f_2(t) = \left(\frac{4}{9}, \frac{6}{9}\right) \Leftrightarrow t = \frac{30}{81} \vee \frac{42}{81}$$

$$f_2(t) = \left(\frac{5}{18}, \frac{7}{18}\right) = \left(\frac{2+3}{2 \cdot 9}, \frac{3+4}{2 \cdot 9}\right) \Leftrightarrow t = \frac{19}{2 \cdot 81}$$

Spørgsmål 3

$$
\begin{aligned}
f_n(t) &= (3^n t, 3^n t) && \text{for } t \in \left[0, \tfrac{1}{9^n}\right] \\
f_n'(t) &= (3^n, 3^n) && \text{for } t \in \left]0, \tfrac{1}{9^n}\right[
\end{aligned}
$$

$$f_n'\left(\frac{1}{2 \cdot 9^n}\right) = (3^n, 3^n)$$

Spørgsmål 4

$$
\begin{aligned}
f_3\left(\frac{1}{7}\right) &= f_3\left(\frac{1}{9} + \frac{2}{9^2} + \frac{5 + \frac{1}{7}}{9^3}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \left(0, \frac{2}{9}\right) + \left(-\frac{1}{27}, \frac{1}{27}\right) + \left(-\frac{1}{7 \cdot 27}, -\frac{1}{7 \cdot 27}\right) \\
&= \left(\frac{9 \cdot 7 - 7 - 1}{7 \cdot 27}, \frac{9 \cdot 7 + 2 \cdot 3 \cdot 7 + 7 - 1}{7 \cdot 27}\right) \\
&= \left(\frac{55}{7 \cdot 3^3}, \frac{111}{7 \cdot 3^3}\right)
\end{aligned}
$$

Spørgsmål 5

Vi skal vise[1]

$$\forall t \in [0,1] \forall n \in \mathbb{N}_0 \forall r > n : \|f_r(t) - f_n(t)\|_\infty \leq 3^{-n}$$

Vi lader nu t, n og r være givet. Vi finder nu m så $t \in \left[\frac{m-1}{9^n}, \frac{m}{9^n}\right]$. Nu gælder det ifølge (iii), at $f_r(t), f_n(t) \in K_n^{(m)}$. Vi får derfor som ønsket:

$$\|f_r(t) - f_n(t)\|_\infty \leq \mathrm{diam} K_n^{(m)} = 3^{-n}$$

Dette giver endvidere $\|f_r - f_n\|_u \leq 3^{-n}$ når $r > n$. Da 3^{-n} går mod 0 (for n gående mod uendelig), fås at følgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er Cauchy. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er Cauchy og $C([0,1], \mathbb{R}^2)$ er et Banachrum, konvergerer f_n mod en funktion $\varphi \in C([0,1], \mathbb{R}^2)$.

Spørgsmål 6

Vi har $\forall n \in \mathbb{N}_0 \forall t \in [0,1] : f_n(t) \in [0,1]^2$ og $\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$. Dermed får vi, da $[0,1]^2$ er lukket, at $\forall t \in [0,1] : \varphi(t) \in [0,1]^2$, hvilket er det samme som $\varphi([0,1]) \subseteq [0,1]^2$. Da $[0,1]$ er kompakt og φ er kontinuert er også $\varphi([0,1])$ kompakt.

Spørgsmål 7

Hvis vi i (iii) lader r gå mod uendelig får vi, da $K_n^{(m)}$ er lukket, at

$$\forall n \forall m \in \{1, 2, \ldots, 9^n\} : \varphi\left(\left[\frac{m-1}{9^n}, \frac{m}{9^n}\right]\right) \subseteq K_n^{(m)}$$

Vi skal nu vise

$$\forall x \in [0,1]^2 \forall n : d(x, \varphi([0,1])) \leq 3^{-n}$$

Vi lader nu x og n være givet. (ii) giver os at der findes et m så $x \in K_n^{(m)}$. Heraf fås:

$$d(x, \varphi([0,1])) \leq d\left(x, \varphi\left(\left[\frac{m-1}{9^n}, \frac{m}{9^n}\right]\right)\right) \leq \mathrm{diam} K_n^{(m)} = 3^{-n}$$

Da dette gælder for alle n er $d(x, \varphi([0,1])) = 0$. Da vi yderligere ved at $\varphi([0,1])$ er lukket fås $x \in \varphi([0,1])$.

Spørgsmål 8

Vi definerer $\psi_k : [0,1]^k \to [0,1]^{k+1}$ ved:

$$\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, \pi_1(\varphi(x_k)), \pi_2(\varphi(x_k)))$$

ψ_k er altså kontinuert og surjektiv idet π_1, π_2, φ og Id er det. Vi definerer nu $\varphi_k : [0,1] \to [0,1]^k$ ved

$$\varphi_k = \psi_{k-1} \circ \psi_{k-2} \circ \ldots \circ \psi_2 \circ \psi_1$$

φ_k er altså kontinuert og surjektiv idet ψ_k er det.

[1] Vi har tilføjet muligheden $n = 0$, da den lige så godt kunne være med.