# Induktion

Niels Woo-Sang Kjærsgaard Anders Schack-Nielsen

# Induktion

Induktionsbeviser bygger på en generel sætning om udsagn, der afhænger af en parameter $n \in \mathbb{N}$, men før vi introducerer sætningen, vil vi lige introducere et aksiom.

**Aksiom 1 (Induktionsprincippet)**
*Lad en mængde $D \subseteq \mathbb{N}$ være givet. Hvis $D$ har følgende to egenskaber:*
*(a)* $1 \in D$, *og*
*(b)* $\forall k \in \mathbb{N} : k \in D \Rightarrow k + 1 \in D$,
*så er* $D = \mathbb{N}$.

Og nu til sætningen:

**Sætning 1 (Induktionsbevis)**
*Lad $U_n$ være et udsagn, som for alle $n \in \mathbb{N}$ er enten sandt eller falsk.*
*Hvis*
*(a) $U_1$ er sandt, og*
*(b)* $\forall k \in \mathbb{N} : U_k \Rightarrow U_{k+1}$,
*så er $U_n$ sandt for alle $n \in \mathbb{N}$.*

Bevis: Lad $D$ være mængden $D = \{n \in \mathbb{N} | U_n \text{ er sandt } \}$. Så er $1 \in D$ ifølge (a), og der gælder $k \in D \Rightarrow k + 1 \in D$ ifølge (b). Af induktionsprincippet følger nu, at $D = \mathbb{N}$, hvormed sætningen er bevist.

## Opgaver

### Opg. 8

Vi skal vise at følgende gælder for alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{1}$$

Tilfældet $n = 1$ (induktionsstarten):

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = \frac{6}{6} = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$$

Vi antager nu, at 1 gælder for et givet $n$ og ser på tilfældet $n + 1$ (induktionsskridtet):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

Hvilket viser, at 1 er sand for $n+1$; og vi kan nu pr. induktion konkludere, at 1 derfor gælder for alle $n \in \mathbb{N}$.

### Opg. 9

Vi skal vise at følgende gælder for alle $n \in \mathbb{N}$,

$$7 | 2^{n+2} + 3^{2n+1} \tag{2}$$

Tilfældet $n = 1$ (induktionsstarten):

$$2^{1+2} + 3^{2+1} = 8 + 27 = 35$$

Hvilket klart er deleligt med 7.

Vi antager nu, at 2 gælder for et givet $n$, således at $2^{n+2} + 3^{2n+1} = 7k$ hvor $k \in \mathbb{N}$, og ser på tilfældet $n+1$ (induktionsskridtet):

$$\begin{aligned}
2^{n+3} + 3^{2n+3} &= 2 \cdot 2^{n+2} + 3^2 \cdot 3^{2n+1} \\
&= 2(2^{n+2} + 3^{2n+1}) + 7 \cdot 3^{2n+1} \\
&= 7(2k + 3^{2n+1})
\end{aligned}$$

Hvilket viser, at 2 er sand for $n+1$; og vi kan nu pr. induktion konkludere, at 2 derfor gælder for alle $n \in \mathbb{N}$.

## Opg. 10

Vi skal vise at følgende gælder for alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \tag{3}$$

Tilfældet $n = 1$ (induktionsstarten):

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} = 1 \leq 2 - \frac{1}{1}$$

Vi antager nu, at 3 gælder for et givet $n$, og ser på tilfældet $n+1$ (induktionsskridtet):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \\
&\leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \\
&= 2 - \frac{(n+1)^2 - n}{n(n+1)^2} \\
&= 2 - \frac{n^2 + n + 1}{(n^2+n)(n+1)} \\
&= 2 - \left( \frac{1}{(n^2+n)(n+1)} + \frac{1}{(n+1)} \right) \\
&< 2 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Hvilket viser, at 3 er sand for $n+1$; og vi kan nu pr. induktion konkludere, at 3 derfor gælder for alle $n \in \mathbb{N}$.

## Opg. 11

### (a)

Vi bemærker, at der for $x \in \mathbb{R}_+$ gælder

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{4}$$

### (b)

Vi skal vise at følgende gælder for alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > 2\left(\sqrt{n+1}-1\right) \tag{5}$$

Tilfældet $n = 1$ (induktionsstarten):

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 = 2\left(\frac{1}{2}\right) > 2\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Vi antager nu, at 5 gælder for et givet $n$, og ser på tilfældet $n+1$ (induktionsskridtet):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
&> 2\left(\sqrt{n+1}-1\right) + 2\frac{1}{2\sqrt{n+1}} && \text{her bruges 4} \\
&> 2\left(\sqrt{n+1}-1\right) + 2\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right) \\
&= 2\left(\sqrt{(n+1)+1}-1\right)
\end{aligned}$$

Hvilket viser, at 5 er sand for $n+1$; og vi kan nu pr. induktion konkludere, at 5 derfor gælder for alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemærk at uligheden 5 er vist skarpt i modsætning til opgaveformuleringen.

## Valgfri opgave

Vi skal vise at følgende gælder for alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1 \tag{6}$$

Tilfældet $n = 1$ (induktionsstarten):

$$\sum_{k=1}^{1} k \cdot k! = 1 \cdot 1! = 1 = (1+1)! - 16$$

Vi antager nu, at 6 gælder for et givet $n$ og ser på tilfældet $n+1$ (induktionsskridtet):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! + (n+1)(n+1)! \\
&= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! \\
&= (n+1)!(1+n+1) - 1 \\
&= (n+2)! - 1
\end{aligned}$$

Hvilket viser, at 6 er sand for $n+1$; og vi kan nu pr. induktion konkludere, at 6 derfor gælder for alle $n \in \mathbb{N}$.

### Kilde:

*Robert Messer, Linear Algebra: Gateway to Mathematics, side 271 opg. 10*